אפיון סביבה של לימוד מדוגמאות פתורות סטטיות ואינטראקטיביות לבעיות מתמטיות בחדר"א[1] באמצעות גישת העומס הקוגניטיבי בלמידה ותאוריית ה-APOS

תקוה עובדיה

רקע תאורטי

תאוריית העומס הקוגניטיבי בלמידה

הוראה ראויה היא כזו שלוקחת בחשבון את תכונותיו ומגבלותיו של מבנה התודעה האנושי, קרי האופן שבו אנו חושבים ומעבדים מידע.[2] סוולר, חלוץ המחקר בתחום העומס הקוגניטיבי[3] הגדיר את תאוריית העומס הקוגניטיבי בלמידה כעוסקת בעיצוב למידה שמטרתה לאפשר רכישת ידע בסביבות למידה מותאמות על-ידי הורדת העומס הקוגניטיבי הלא רצוי ושאינו הכרחי ללומד. העיקרון המרכזי עליו סוולר משתית את התאוריה מתבסס על רעיון הברירה הטבעית - "החזק תמיד ישרוד". כלומר, הידע "החזק" תמיד ישרוד לעומת הידע "החלש". סוולר[4] הגדיר את הארכיטקטורה של מבנה התודעה האנושית באמצעות חמישה עקרונות, משלב אחסון המידע ועד ארגונו ושימוש בו באופן חוזר:[5] (1) אחסון המידע בזיכרון באמצעות זיכרון לטווח קצר וארוך; (2) אדפטציה של ידע ישן וסיגולו למצב חדש או לידע חדש (כמו למידה מדוגמה פתורה); (3) האקראיות המתפתחת בעיקר מיישום אסטרטגיות היוריסטיות בזמן פתרון בעיה; (4) הגבלת קיבולת הזיכרון הגורמת לאדם לברור את החיוני לשמירה ולזרוק את הלא רלוונטי בזמן אמת. מאחר שהידע הקיים לא תמיד

---

1 חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

2 Sweller, Van Merrienboer & Paas, 1998; Van Merrienboer & Sweller, 2005

3 Sweller, 1988, 2011

4 Sweller, 1988

5 Sweller, 2015

מתאים וזמין לבעיה הספציפית, המוח מגביל ומצמצם את קיבולת הזיכרון לטווח קצר; ו-(5) ארגון הסביבה באמצעות קשרים בין מושגים או חלקי ידע.

תאוריית ה-APOS[6] היא כלי לניתוח התפתחות תפיסות מתמטיות, היא מיושמת במחקרים בתחום החדו"א ומתבוננת בלומד בארבעה ממדים: בפעולות (Actions), בתהליכים (Processes), באובייקטים (Objects) ובארגונם בסכמה (Schema), זאת על מנת להבין מצבי בעיה ומצבי פתרון בעיה של היחיד. פעולות (A) הן פעולות שהלומד מבצע בהתאם להוראות חיצוניות; הבנה של מהות הפעולות יוצרת תהליך (P); התהליך משקף הבנה של רצף של פעולות בהקשר מסוים. כאשר הלומד מבין שמתוך התהליך נוצר אובייקט (O), הבנה שעל האובייקט הזה ניתן לבצע פעולות, ושיש לאובייקט מעמד עצמאי של עצם. כתוצאה מהבנה של אובייקטים יוצר הלומד את הסכמה הקוגניטיבית שלו (S), על הנושא או המושג, והיא מורכבת מכל הפעולות, התהליכים והאובייקטים שבנה. ארבעת הממדים מתארים תהליך מתפתח, ובאמצעותם ניתן לעקוב אחר תהליך ההתפתחות של תפיסת מושגים תוך כדי פתרון בעיות ובמהלך תהליך מצטבר של פתרון בעיות. על-פי סוולר, האדם מרחיב את גבולות הזיכרון והאחסון באמצעות בנייה של ידע מקושר שמאוחסן "בצפיפות" ובאמצעות סכמות מובנות, וכך מתפנה מקום בזיכרון לידע חדש. שתי התאוריות מציגות אפוא כ"שיא ההבנה" את המצב שבו האדם מארגן את הידע באמצעות קשרים, באמצעות סכמה המרכזת בתוכה את כל היבטי הידע.

עיקרון זה מרחיב את הרעיון של מילר[7] הטוען לנפח פריטים בזיכרון עבודה הכולל שבע פלוס מינוס שתיים, ואת הרעיון של קוואן[8] המתייחס לעיבוד ארבעה פריטים ב-30 שניות. סוולר טוען שעומס קוגניטיבי מושפע ממשאבי הזיכרון הפועלים בזמן עיבוד וביצוע משימה, ובהתאם לעקרונות מבנה התודעה. על כן יש לעצב את סביבות הלמידה בהתאמה למבנה התודעה האנושית גם מבחינת התאמה לתכונותיו של הזיכרון.

כהמשך להתפתחות התאוריה נעשו מחקרים שעסקו במדידה של העומס הקוגניטיבי בעת פתרון בעיות.[9] העומס הוגדר כמצב שיש בו שני ממדים: ממד סיבתי המשקף את האינטראקציה בין המשימה ומאפייני הלומד, וממד ההערכה המשקף מושגים מדידים של עומס נפשי, מאמץ נפשי וביצועים. מאפייני המשימות שזוהו במחקרי העומס הקוגניטיבי הם: תבנית המשימה, מורכבות המשימה, שימוש במולטימדיה, לחץ זמן וקצב ההוראה.

---

[6] Dubinsky & McDonald, 2001

[7] Miller, 1956

[8] Cowan, 2001

[9] Paas, Tuovinen, Tabbers & Van Gerven, 2003

מאפייני הלומד הרלוונטיים הם רמת מומחיות, גיל ויכולת מרחבית. במחקרים שנעשו על אינטראקציות בין כמה משתנים, כגון מאפייני משימה עם מאפייני לומד, נמצאו תוצאות בהקשר של המלצות לעיצוב משימות בהוראה.

שניים מבין סוגי העומסים הקוגניטיביים הם: עומס קוגניטיבי פנימי הקשור במשימה ומשתנה מאדם לאדם בהקשר של מומחיותו ביחס לתחום המשימה; עומס קוגניטיבי חיצוני התלוי באופן בו מוצגת המשימה ולפיכך ניתן לשינוי ועיצוב המותאם ללומד. עומס קוגניטיבי מתבטא במאמץ המנטלי המוקדש לעיבוד, בנייה, ארגון ואוטומטיזציה של המידע בתבניות חשיבה. על מנת להגיע ללמידה אופטימלית, חשוב למזער ולהגביל את העומס הקוגניטיבי החיצוני הנכפה על-ידי אופן הצגת המידע, ולשאוף להגביר במקום זאת את העומס הקוגניטיבי המוקדש לארגון המידע במבנים מנטליים, הנחשב לעומס פנימי יעיל.[10]

במחקר הנוכחי אתמקד בהצגה של רעיון להוראה שיש בכוחו להקטין עומס קוגניטיבי בהתייחס ללמידה באמצעות דוגמה פתורה סטטית או בסביבה אינטראקטיבית.[11] רעיון זה לא יושם בקרב סטודנטים מומחים הלומדים לתואר שני, לא נחקר בגישות איכותניות העוקבות אחר תהליך מתמשך שבו חוזרים על הניסוי שוב ושוב והמתייחסות לרפלקציית הלומד בהקשר של דיווח על מידת העומס, וכמו כן לא יושם בתכנים מתמטיים העוסקים בפתרון בעיות בחדו"א תוך התמקדות בהבנת עומק במושגים מהותיים בתחום.

למידה מדוגמאות פתורות סטטיות

דוגמה פתורה היא הדגמת פתרון של בעיה באמצעות ייצוגים ויזואליים ומילוליים, או הוראות כיצד לבצע את המשימה, שלב אחר שלב. דוגמה פתורה סטטית היא פתרון בעיה המוצג על דף, הכולל את שלבי התהליך, עם או ללא איורים, גרפים והסברים נוספים.

מחקרים מראים כי חקר דוגמאות פתורות שהוכנו מראש עבור הלומד, מקדם יכולת פתרון בעיות במידה רבה יותר מלימוד של אסטרטגיות לפתרון בעיות. קיימות עדויות אמפיריות לכך שתהליך למידה באמצעות דוגמאות פתורות יוצר הכללה של רעיון או הפשטה והעברה של ידע ואסטרטגיות פתרון מבעיה לבעיה או בין נושאים מתמטיים שונים.[12]

דוגמאות פתורות מקטינות עומס קוגניטיבי בזמן הפענוח שלהן, ומרחיבות את קיבולת זיכרון העבודה בזמן אמת. השימוש בהן מניע את הלומד לפענח, ובו זמנית גם לייצר תובנות חדשות של ידע ומיומנויות ועל כן יש להן פוטנציאל לשמור את הידע החדש

[10] Pollock, Chandler & Sweller, 2002

[11] למשל: Tindall-Ford et al., 2015; Wong, Leahy, Marcus & Sweller, 2012

[12] Youssef-Shalala et al., 2014; Hoogerheide, Loyens & Van Gog, 2014; Sweller, 2015

בזיכרון לטווח ארוך. יחד עם ההכללה של המושג "דוגמה פתורה", קיימת גם אבחנה בין צורות שונות של דוגמאות פתורות, אבחנה שנועדה לצורך חקירת כל צורה, ולעיצוב ולמידה על הקשר שבין העיצוב לאפקטיביות של הלמידה.

הצגת דוגמאות פתורות שונות לאותה בעיה מעוררת דיון אודות דמיון ושוני בין הדוגמאות ומקדמת חשיבה אודות פתרון בעיות.[13] רוסו[14] אף ממליץ להוסיף לדוגמת הפתרון גם גרפים המהווים הסבר מתאים לשלבים מסוימים בפתרון. הגרף מהווה חלק ממידע שהתלמיד צריך לפענח על מנת להבין את המבנה המתמטי הכולל של הפתרון. קירשנר סוולר וקלרק[15] מתייחסים לדוגמאות פתורות כבעלות פוטנציאל להכוונה ישירה של הלומד: הן יעילות בהקטנת העומס הקוגניטיבי ועשויות לכוון אותו לפתח סכמה קוגניטיבית רלוונטית (מעין מודל קוגניטיבי הכולל מבנה קבוע של עקרונות הניתנים ליישום בבעיות מסוג מסוים), שתסייע לו בפתרון בעיות בעתיד. קרלסון ובלום[16] מציעים לבחון את תתי-השלבים שהוגדרו על-ידי חוקרים קודמים כשלבים לניתוח דוגמאות פתורות: התמצאות, ארגון, ביצוע ואימות, ולהוסיף להם שלבי ביניים הכוללים שאלות מטא-קוגניטיביות המסייעות ללומד לעבור משלב לשלב. פעולה נוספת שנמצאה יעילה לקידום תהליך פתרון בעיות היא תרגול של הסבר עצמי המלווה את פתרון הבעיה.[17] תלמידים הנדרשים להסביר לעצמם תופעות מתמטיות או פרוצדורות של פתרון, זוכרים את הנלמד לטווח זמן ארוך יותר, ויוצרים לעצמם סכמה קוגניטיבית בעלת קשרים רבים ואיכותיים יותר של החומר הנלמד.

המחקר הנוכחי מתייחס למשתתפים בו כאל טירונים בתחום פתרון הבעיות בחדו"א במבנה החיצוני וגם הפנימי שבו הן הוצגו. כחלק מתהליך המחקר, המשתתפים נדרשו לעבד וללמוד מדוגמאות פתורות סטטיות בתחום החדו"א שנוסחו באופן שהמשתתפים פחות מכירים. הליך זה בוצע בשל המלצת החוקרים ליישום דוגמאות פתורות בקרב טירונים כהליך מארגן ידע באמצעות עקרונות של פתרון, והמקדם העברה לפתרון בעיות אחרות דומות.

למידה מדוגמאות פתורות אינטראקטיביות

אטקינסון ורנקל[18] דנים בשלושה סוגים של סביבות אינטראקטיביות המעודדות ניתוח של פתרונות המוצגים בצורת "דוגמאות פתורות": (1) דוגמאות לא שלמות שעל הפותר להשלים

[13] Rittle-Johnson, Schneider & Star, 2007; Star & Pollack, 2015
[14] Rossow, 2005
[15] Kirschner, Sweller & Clark 2006
[16] Carlson & Bloom, 2005
[17] Artino, 2008; Wong, Lawson & Keeves, 2002; Chi et al., 1989
[18] Atkinson & Renkl, 2007

בהן מידע. דוגמאות אלה משתנות בהתאם להתפתחות הידע, כך שככל שהידע של הלומד גדל, כך הוא נחשף לבעיה שפחות מידע מרכזי נתון בה ויותר מידע מרכזי לא מוצג בה;[19] (2) דוגמאות שבהן הפותר נדרש להוסיף הסבר עצמי. מוצג בהן פתרון מתמטי והלומד צריך להוסיף הנמקות מתמטיות לשלבי הפתרון. דוגמאות אלה מחייבות את הלומד להבין לעומק אלגוריתם או שלב בפתרון כעיקרון או כהיוריסטיקה לפתרון, דבר שעשוי למנוע למידה שטחית של פענוח דוגמה פתורה של פתרון בעיה כמקרה פרטי; ו-(3) דוגמאות פתורות המוצגות באופן שלם באמצעות כלי ממוחשב. הן אינן מלוות בהסברים ואינן דורשות הסברים של הלומד, אך ניתנת לו האפשרות לקבל עזרה בשלבים שונים של ניתוח הפתרון. העזרה מאופיינת בהסבר עקרוני של השלב בפתרון, ותלויה במבנה של היישומון כפי שעיצב אותו המורה, ולפי המידע המרכזי שאותו המורה התכוון לחשוף בפני הלומד תוך כדי אינטראקציה עם היישומון.

אטקינסון ורנקל חקרו את שלושת המצבים הללו והסיקו כי תכונות אינטראקטיביות הן יעילות רק כאשר הן מעוררות תהליכי למידה רלוונטיים באופן ישיר בהקשר של מטרות למידה מרכזיות הקשורות בידע קריטי. אינטראקטיביות אינה יעילה כשלעצמה, עם זאת, אלמנטים אינטראקטיביים יכולים לשמש כדי להפעיל את העיבוד של היבטים מרכזיים של חומרי למידה. בדומה לאטקינסון ורנקל,[20] בחנו הוגרהיידה לוינס וואן גוג[21] דוגמאות פתורות מסוג אינטראקטיבי המכונות **modeling examples** המוצגות באמצעות וידאו עם מערכת קול המשמיעה את הדוגמה (לעומת וידאו ללא קול) ומצאו כי הלמידה באמצעות דוגמאות אלה קידמה את תפיסת היכולת העצמית של הלומדים להעברת הלמידה שלהם לפתרון בעיות אחרות ואת הידע בנושא.

במחקרם של טינדול-פורד ועמיתיו[22] בוצעו ניסויים על ארבע קבוצות למידה על מנת לבחון את הקשר שבין למידה מדוגמאות פתורות, עומס קוגניטיבי ופיצול קשב. נמצא כי הקבוצה שלמדה באמצעות דוגמאות פתורות אינטראקטיביות המפנות את הלומד לפחות פיצול קשב, הגיעה להישגי למידה הטובים ביותר.

יאנג ופאס[23] מצאו כי הייצוגים הוויזואליים הדינמיים מדריכים את הלומד לעקוב אחר התכונות הקריטיות שלהם, הוויזואליות מקטינה עומס קוגניטיבי בזמן למידה, כך שהלומד מפנה את המקום בזיכרון העבודה לביסוס הבנת העומק של הסיטואציה המתמטית הנתונה בהקשר של ידע קודם וביצירה של ידע חדש.

---

[19] מידע מרכזי פירושו הרעיונות הקריטיים הכוללים את הנוסחאות, המושגים והאסטרטגיות לפתרון.

[20] Atkinson & Renkl, 2007

[21] Hoogerheide, Loyens & Van Gog, 2014

[22] Tindall-Ford et al., 2015

[23] Yung & Paas, 2015

יתרונם של האמצעים הטכנולוגיים בהצגת הדוגמה הפתורה, הוא באפשרות להציג בו-זמנית את מגוון הייצוגים של מצבי הפתרון של הבעיה. כלומר, ריבוי פתרונות למצב אחד באמצעות הצגה דינמית של המצבים הכוללת ייצוג סימבולי, אלגברי וייצוג גרפי המשתנים דינמית בהתאם לתנאי הבעיה ולפתרון (או לפתרונות), ובהתאם למעבר בין ייצוגים שהלומד מיישם, ולמבנה היישומון. הצגה זו מאפשרת ללומד לתפוס את המושג כדינמי, מושג הכולל תמונות רבות לאותו ייצוג אלגברי סימבולי וגרפי. הכלים הדינמיים מאפשרים ללומד ליצור קשר לוגי בין פתרון אלגברי לפתרון גרפי-פונקציונלי של בעיות נתונות, באופן שבו הוא מחליט לקשר ביניהן.

המחקר הנוכחי מנסה לשלב בין העקרונות שהציגו החוקרים לעיצוב דוגמה פתורה אינטראקטיבית, ולהתאימם להוראה של סטודנטים (מורים) בתוכנית לתואר שני. עיצוב המחקר מְחַדש את היישום של חקר דוגמה פתורה אינטראקטיבית בחדו"א ככלי לצמצום העומס הקוגניטיבי של הלומדים ולהגדלה ופיתוח הידע המתמטי והמתמטי-דידקטי של הסטודנטים.

התפתחות תפיסות ויזואליות בחדו"א

הוראת החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי (חדו"א) כרוכה בהבנת עומק של מושגים הקשורים בתחום, והבנת ההקשר הרחב שבין הייצוגים של המושגים. התפתחות ההבנה והרכישה של מושגים בחדו"א כרוכה בפתרון בעיות המאתגר בביצוע מתמיד של קשר מפורש בין מושגים, בין ייצוגים שונים לאותו מושג ויצירה של תובנות חדשות למקרים פרטיים ולמשפחות של פונקציות. לומדים שנשאלים שאלות שגרתיות בחדו"א מציגים פתרונות צפויים אך כאשר הבעיות המוצגות אינן שגרתיות, ניכרים קשיים בהבנה ובתפיסה של רוב המושגים בחדו"א, ושל המעברים בין הייצוגים.[24] השימוש בייצוגים שונים הכרחי בלימודי המתמטיקה, כיוון שהמתמטיקה היא מופשטת ומורכבת ולכן הייצוגים השונים מהווים נקודת הנגשה למשמעות המתמטית.[25] במחקרם של נמירובסקי ורובין נמצא כי תלמידי תיכון מייחסים לפונקציה המקורית ולפונקציית הנגזרת תכונות זהות ומשרטטים גרף זהה לשתיהן. במחקרו של פארק[26] אודות הוראה של מורים את מושג הנגזרת נמצא כי דיונים שלהם על הנגזרת כפונקציה הדגישו שימוש מוגבל במתווכים חזותיים.

למרות ה"טבעיות" שבהגבלת התפתחות הבנת עומק של המושגים, מסתבר ש"הגבלת" ההבנה של מושגים כגון "גבול" "נגזרת" או "אינסוף" יכולה להימנע באמצעות

---

[24] De Bock, van Dooren & Verschaffel, 2015; Chang, Cromley &Tran, 2016; Tall, 1985a, 1985b; 1990; 2000; Tall, Smith & Piez, 2008

[25] De Bock, van Dooren & Verschaffel, 2015

[26] Nemirovski & Rubin, 1992; Park, 2015

שימוש בכלים טכנולוגיים. כלים אלה הם בעלי פוטנציאל להציג בו-זמנית ייצוגים שונים שבאמצעותם הלומדים יכולים לפתח הבנה של הגרפים או ריבוי הגרפים, הקשרים בין הייצוגים, והמקרים המיוצגים כפתרון לבעיה אחת או לייצוג סימבולי אלגברי תואם.[27]

במונחים של ממדי העומס הקוגניטיבי שהוזכרו בסעיפים הקודמים ומתייחסים לממד מבנה המשימה, לממד מומחיות הלומד ולמדד תנאי הסביבה, תחום החדו"א במהותו מְזַמֵן עומס קוגניטיבי גבוה בזמן פתרון בעיות. בתחום זה נמצא כי לפותרים רבים יש מיומנויות אלגוריתמיות יותר מאשר מיומנויות של פתרון בעיות לא שגרתיות, והם מתקשים במעבר טבעי בין ייצוגים לצורך פתרון בעיה. אי לכך, רוב המורים והסטודנטים הפותרים בעיות בלתי שגרתיות בחדו"א מוגדרים כ"טירונים" בתחום. בנוסף, בעיה לא שגרתית בחדו"א במהותה היא בעלת עומס פנימי מאחר והיא כוללת ריבוי קשרים בין מושגים וריבוי מיומנויות קוגניטיביות שהפותר אמור לשלוט בהן. יישום פתרון בעיות בדרכים שהומלצו על-ידי חוקרים בתחום (כגון: למידה באמצעות דוגמאות פתורות סטטיות או אינטראקטיביות) עשוי להיות יעיל במונחים של הפחתת עומס קוגניטיבי.

עיצוב סביבות למידה

כדי שמורים ימקסמו את הלמידה שלהם ממשימות מתמטיות, יש לעצב אותן באופן מתאים לתהליך הלמידה של המורים. מחקרן של עובדיה וסגל[28] מצביע על מסגרת תאורטית המחברת בין שלוש תאוריות הדנות בעיצוב משימות: התאוריה של זסלבסקי לעיצוב משימות עבור מורים; התאוריה של סוולר לעיצוב הוראה הנגזרת מתאוריית העומס הקוגניטיבי; התאוריה של מאייר לעיצוב משימות באמצעות כלים טכנולוגיים.[29] נמצא כי חמש מהתמות לעיצוב משימה של זסלבסקי, תומכות בתאוריית העומס הקוגניטיבי ללמידה ובתאוריית המולטימדיה.

המחקר הנוכחי עיצב את סביבת הלמידה בהתאם לתפיסות אלו, כך שהבעיות שנבחרו התמקדו במושגים מרכזיים של התכנים בחדו"א. כך ניתנה הזדמנות ללמוד מבעיה אחת על פתרון בעיה אחרת. זוהי אחת מתכונות הלמידה מדוגמאות פתורות. המשימות שנבחרו כללו אפשרות של דינמיות גם אם מינימלית וקריטית, שאינה מעמיסה על הלומד.

[27] Awang & Zakaria, 2013; Kabael, 2009, 2011; Verhoef et al., 2015
[28] Ovadiya & Segal, 2017
[29] Zaslavsky, 2008; Sweller, 2015; Mayer, 2014

שיטת המחקר

מדידת עומס קוגניטיבי באמצעות דיווח סובייקטיבי

מחקר זה מתמקד בבחינת עומס קוגניטיבי באמצעות ניתוח דיווחי הסטודנטים ולמידה מהם. הדיווחים נמסרו במהלך ביצוע המשימה ולאחריה באמצעות סולם דירוג סובייקטיבי. דרך זו פשוטה ומקובלת במחקר מסוג זה כבר מעל 20 שנה, מאחר שהיא מבוססת על ההנחה כי אנשים יכולים להתבונן בתהליך הקוגניטיבי העצמי באופן מהימן ולתרגם את המאמץ המנטלי המושקע שלהם.[30]

הסטודנטים שהשתתפו במחקר הנוכחי למדו קורס העוסק במחקר בחינוך מתמטי ובמסגרתו קראו מאמרי מחקר המתמקדים בהגדרות של עומס קוגניטיבי (פנימי וחיצוני) ודרכי עיצוב למידה בהתאם לתאוריית העומס הקוגניטיבי. בקורס זה גם בוצעו ניסויים בהקשר של מדידת עומס קוגניטיבי באמצעות דיווחי הלומדים, בהתאם לרעיונות והבעיות המתמטיות שעלו מהמחקרים בתחום. בהמשך המחקר הנוכחי, המשתתפים התבקשו למדוד עומס קוגניטיבי והיה עליהם לציין ציון ממוצע משוער לתחושת העומס הפנימי הנובע ממאפייני הלמידה שלהם ומהמומחיות שלהם בתחום, לעומת העומס החיצוני הנובע ממבנה המשימה וסביבת הלמידה בה ניתן לפתור אותה. מדידת העומס הקוגניטיבי בוצעה באמצעות הצהרת הלומדים בזמן אמת על ציון בטווח 1-9 בזמן הפתרון, המתייחס להיבטים שונים של החוויה הלימודית (ראו טבלה 1 עמ' 121).

מהלך המחקר

המחקר נבנה כהליך שנלמד ממחקרים קודמים קרובים. במחקר של וקסמן[31] נמצא קשר בין עומס קוגניטיבי לעיבוד ייצוג ויזואלי, והפרמטרים שנמצאו כמשפיעים על העומס הם: סוג הבעיה; ידע קודם של הנבדק אודות הבעיה; שאלות הכוונה על הייצוג הוויזואלי. הפרמטר של עומס חזותי הקשור בייצוג לא נמצא כמעמיס על הנבדק. ממחקר זה למדתי את הפרמטרים המשפיעים על עומס קוגניטיבי בהקשר של ייצוג גרפי, מאחר והמחקר הנוכחי כלל בעיות שבכולן הפותר נדרש להתמודד עם ייצוג גרפי.

לאורך 13 מפגשי הלימוד, הסטודנטים התמודדו עם פתרון בעיות בחדו"א באופנים שונים שחזרו על עצמם: עיבוד ולימוד מדוגמה פתורה שהוצגה בכלי אינטראקטיבי; לימוד מדוגמה פתורה סטטית; פתרון בעיה ללא דוגמה פתורה. במחקר השתתפו שתי קבוצות בנות 10 סטודנטים כל אחת, לאורך 13 שיעורים בשתי תקופות זמן שונות. שתי הקבוצות נחשפו לאותה קבוצה של בעיות בחדו"א ולדרכי הוראה זהות.

---

[30] וראו: Brünken, Plass & Leutner, 2003; Hu, Ginns & Bobis, 2015; Paas, 1992, 1994; Paas et al., 2003; Tindall-Ford at el., 2015

[31] וקסמן, 2017

נאספו נתונים אודות עומס קוגניטיבי בכל הפעילויות הקשורות בפתרון הבעיות. הדיווח היה סובייקטיבי ונרשם בטבלה שכללה פרמטרים שנמצאו (במחקרים קודמים) כבעלי השפעה על עומס קוגניטיבי, ופרמטרים שהלומדים הוסיפו כפי שהם הגדירו אותם מתוך חוויית למידתם. בנוסף למדידה הסובייקטיבית של העומס, התקיימו דיונים אודות המאפיינים של העומס בכל בעיה.

השערת המחקר הייתה כי גישה זו של ניתוח דוגמאות פתורות אינטראקטיביות, לעומת פתרון בעיות או חקר דוגמה פתורה סטטית, מפחית עומס קוגניטיבי בלמידה. הפתרון המוצג באמצעות כלי אינטראקטיבי מציג את הסמלים המתמטיים בהקשר של הייצוגים הגרפיים המתאימים, ואת היחסים והקשרים בין כל מרכיבי הבעיה באופן דינמי. בדרך זו הלומד נחשף לצדדים ותכונות של הפתרון תוך כדי פעילות שהוא מנהל בכלי הדינמי. מצב זה מאפשר ללומדים לייצר יותר מידע חדש בהקשר של ניתוח הבעיה הנתונה, ובהקשר של המושגים המתמטיים המוצגים בה באופנים שונים, והקשר שלהם לידע קודם, בפחות זמן (מכיוון שהמהירות בה הכלי הטכנולוגי מציג מידע, גבוהה ממהירות העיבוד של הפותר על כל מאפייני הייצוג בהקשר של הבעיה).

סביבת הלמידה

ההוראה בקורס התמקדה בלמידה מפתרון בעיות לא שגרתיות בחדו"א באמצעות פתרון בעיות או ניתוח דוגמאות פתורות סטטיות או כאלה המוצגות אינטראקטיבית באמצעות כלים טכנולוגיים. הבעיות שנבחרו היו משני מקורות מרשתת מרכזיים.[32] במחקר אציג את כל הממצאים דרך הדגמת הבעיה המבוססת על המקור להלן,[33] עם שינויים שביצעתי בה על מנת שתתאים לסביבת המחקר.

העקרונות המנחים בבחירת הבעיות הפתורות מתייחסים לעקרונות בעיצוב משימות עבור מורים על-פי המסגרת התאורטית שאוחדה ותוארה לעיל במחקרן של עובדיה וסגל.[34] הבעיות שנבחרו מאתרי המרשתת עוצבו מחדש כדי שיתאימו לקבוצת הלומדים ולסביבת המחקר בהתאם למסגרת התאורטית הנזכרת.

למשל בבעיה בקישור המופיע בהערה 33, שאלות הפתיחה לבעיה היו פשוטות ללומדים ולכן לא הצגתי אותן אלא את הבעיה המרכזית: האם תוכל להסביר ולהוכיח דרך השרטוט הדינמי של מעגל היחידה את הנגזרת של פונקציית הטנגנס? זו בעיה המעוצבת כך שהיא כוללת את כל העקרונות של המסגרת התאורטית:[35] (א) פיתוח והתאמה: היא

32 undergroundmathematics.org; wolframalpha.com

33 https://undergroundmathematics.org/calculus-trig-log/similar-derivatives

34 Ovadiya & Segal, 2017

35 שם

מאתגרת מאחר והמורים מכירים את כל הידע הנדרש, אך לא התנסו בארגונו לכדי "הוכחה" מתמטית באמצעות כלי דינמי; (ב) הכלי הדינמי יוצר שאלות רבות ללומד בדרך לפתרון, ומסייע בהבנת התשובות לשאלות באמצעות השוואה של ידע קודם לידע המתגלה באמצעות הכלי הדינמי; (ג) הבעיה מזמנת דיון בקונפליקטים מכיוון שלא כל מה שמוצג באמצעות היישומון המוכן מראש ברור למי שנחשף אליו ולא בנה אותו; ו-(ד) יש גם סיכוי לדיון במחסומי למידה, מכיוון שהלומדים עשויים לבחור בהוכחה פורמלית שאינה מתחברת לרעיון של מעגל היחידה.

כחלק מה-setting של סביבת הלמידה, המשתתפים נדרשו לציין את מידת העומס הקוגניטיבי בכל אחת מהבעיות שפתרו ולהשתתף בדיון הכולל נימוקים לציוני מידות העומס והצגת הרעיונות האינטואיטיביים והפורמליים שלהם על הבעיות.[36]

מטרת המחקר

מטרת המחקר הייתה לאפיין את התהליך שחווים סטודנטים לתואר שני שהם גם מורים למתמטיקה, כאשר הם מתמודדים עם פתרון בעיות, חקר דוגמאות פתורות סטטיות, וחקר דוגמאות פתורות בסביבה אינטראקטיבית מתחום החדו"א. התמקדות האפיון הייתה כפולה: התייחסות למידת העומס הקוגניטיבי שהם חווים בהתאם לתאוריית העומס הקוגניטיבי, והתייחסות להתפתחות ידע מתמטי קונספטואלי בתחום החדו"א כפי שניתן לזהותו בהתאם לתאוריית APOS.

כלי המחקר

במחקר נעשה שימוש בארבעה כלי מחקר איכותניים:

1. יומני דיווח למידה של הסטודנטים[37] שכללו דיווחים על פתרון הבעיות בהן הם עסקו בשיעור ועל חוויית העומס הקוגניטיבי. הלומדים כתבו ביומן את הפתרון הפורמלי כפי שהבינו אותו מההצגה הסטטית או הדינמית, ואת התובנות המתמטיות שהפתרון חידש להם והביעו רעיונות דידקטיים להוראה. מדי שבוע הם הגישו כמטלה את פרק היומן המסכם את השיעור שחוו. מקריאת יומני הלומדים והתרשמות אודות מדד העומס, מידע קיים שלהם לעומת ידע חסר בחדו"א - בניתי את העיצוב של השיעור הבא.
2. יומן חוקרת[38] כלל את כל המחשבות והרעיונות שעלו אצלי כחוקרת בשלב תכנון השיעור, בזמן ניהול השיעור וברפלקציה על ההוראה. למשל: כשהבחנתי שסוג הבעיה פשוט ללומדים ולא מאתגר אותם לבחון את הפתרון הדינמי, רשמתי לעצמי לבחור

[36] בקישור הבא: https://www.geogebra.org/m/u5qBYg7K
[37] Bell, 2014; Sullivan & Brian, 2012
[38] שם

בעיות מורכבות יותר. כשזיהיתי שחסר להם ידע קודם בתחום מסוים, החלטתי לאתגר אותם עם פתרון בעיה בתחום שבו יש לפתח ידע חסר זה. למשל כשגיליתי שהם לא משתמשים בתכונות של שיקוף וסימטריה בניתוח פונקציות, או בחישוב אינטגרלים לפונקציות מסוימות, אתגרתי אותם עם בעיה שמחייבת יישום של תכונות אלה.

3. תיעוד תצפיות של השיעורים נעשה באמצעות הקלטות אודיו ותמלולן. לבקשת המשתתפים, בנוסף לתיעוד זה צולמו תמונות מסך חשובות ותמונות לוח כיתה.
4. טבלאות דיווח אודות העומס קוגניטיבי כללו ציון אישי לדרגת עומס ולכל פעילות הקשורה בפתרון בעיות. הסטודנטים היו רשאים להוסיף בהן פרמטרים לציון עומס כהבנתם ולפי חווייתם. להלן דוגמה לטבלה המציגה מדידת עומס על-פי פרמטרים.

טבלה 1: **מדידת עומס סובייקטיבית**

פעולות ותהליכי למידה-(קריטריון מוערך)	**הערכה גבוהה לעומס קוגניטיבי ציון 6-9**	**הערכה בינונית לעומס קוגניטיבי ציון 4-5**	**הערכה נמוכה לעומס קוגניטיבי ציון 1-3**
פענוח בעיה מוכרת ללא פתרון			
פענוח בעיה ופתרונה כאשר הפתרון מוצג בסגנון לא מוכר			
פענוח דוגמה פתורה לא אינטראקטיבית לבעיה מוכרת			
פענוח דוגמה פתורה לא אינטראקטיבית לבעיה לא שגרתית			
פענוח דוגמה פתורה אינטראקטיבית לבעיה מוכרת			
פענוח דוגמה פתורה אינטראקטיבית לבעיה לא מוכרת			
פענוח של חלק נבחר מהדוגמה הפתורה האינטראקטיבית			
פענוח דוגמה פתורה אינטראקטיבית של בעיה דומה			
תכנון פתרון אינטראקטיבי			
תכנון פתרון בכתב (דף ועט)			
הבעת הפתרון באופן מתמטי פורמלי בכתב			
הבעת הפתרון באמצעות כלי טכנולוגי			
לחץ של זמן			
לחץ של סביבה (למשל פותרים אחרים סיימו ואני לא)			
(קריטריון שהוסיפו סטודנטים) חוסר מומחיות בתחום הבעיה			
סגנון בעיה מנוסח באופן לא מוכר			
(קריטריון שהוסיפו סטודנטים) בעיות נוספות שניתן לחבר על הפתרון האינטראקטיבי			

איסוף נתונים

נתונים נאספו באמצעות ארבעת כלי המחקר. מסדנאות העבודה והדיונים; מתצפיות על אופן פענוח הפתרונות הדינמיים שביצעו הסטודנטים בזמן אמת; מהיומנים שהסטודנטים כתבו תוך כדי פענוח פתרון הבעיות; מטבלאות מדידת העומס שמילאו הסטודנטים תוך כדי ביצוע המשימות השונות ואחריהן; מעבודות בית בהן נדרשו הסטודנטים לפתור בעיות שעוצבו באופנים שונים בדומה לשיעור, ולייחד את הסביבה של הלמידה בהתאם לתובנות המתמטיות והמתמטיות-דידקטיות שלהם; מיומן החוקרת.

חדשנות המחקר

הקטנת העומס הקוגניטיבי על ידי פינוי זיכרון העבודה של סטודנטים על מנת להעמיק ידע מתמטי ומתמטי-דידקטי של פתרון בעיות מתחום החדו"א.

ניתוח הנתונים

כאמור, המחקר עוצב כמחקר איכותני מסוג חקר מרובה מקרים. כל הנתונים סווגו לאירועים. בהמשך יצרתי מפת אירועים שסווגו על-פי מאפיין מרכזי שהוא קטגוריית האירועים. מאחר וכל האירועים בהקשר של דוגמה פתורה סטטית הציגו ממצאים בדומה למחקרים קודמים, מלבד הקטגוריה המתייחסת לתפיסות המורים אודות חקר דוגמאות פתורות, ניתוח האירועים התמקד בעיקר בניתוח פתרונות שהוצגו באמצעות כלים אינטראקטיביים.

נוצרו ארבע קטגוריות מרכזיות של אירועים: (1) אירועים שמעידים על תפיסת המורים את תהליך הלמידה מדוגמאות פתורות; (2) אירועים המעידים על גילוי ידע מתמטי חדש; (3) אירועים המעידים על ידע מתמטי-דידקטי חדש; ו-(4) אירועים המלמדים על הקשר שבין עיצוב המשימה לעומס הקוגניטיבי של הלומד.

מסגרות תאורטיות לניתוח נתונים

האירועים נותחו באמצעות קיומם או אי-קיומם של חמשת העקרונות של מבנה התודעה האנושית שהגדיר סוולר.[39] בנוסף, אותם אירועים נותחו בהתאם לתאוריית APOS.[40]

ממצאים

כמענה לשאלת המחקר: "מה מאפיין תהליך למידה של פתרון בעיות, חקר דוגמאות פתורות סטטיות ואינטראקטיביות בחדו"א בקרב סטודנטים-מורים", אציג להלן את התשובה לאפיון תהליך הלמידה באמצעות התמות הבאות: (1) תפיסות של מורים בהקשר של דוגמאות

39 Sweller, 1988

40 וראו: Arnon, et al., 2013; Borji, Alamolhodaei & Radmehr, 2018

פתורות; (2) ניתוח פתרונות אינטראקטיביים וגילוי ידע מתמטי חדש; (3) ניתוח פתרונות אינטראקטיביים וגילוי ידע מתמטי-פדגוגי חדש; ו-(4) ניתוח פתרונות אינטראקטיביים והקטנת עומס קוגניטיבי. את שלוש התמות הראשונות אציג באמצעות תאוריית ה-APOS. את התמה האחרונה אציג באמצעות תאוריית העומס הקוגניטיבי. לבסוף אאחד בין כל הרעיונות בהקשר לתשובה על שאלת המחקר.

1. תפיסות של מורים בהקשר של דוגמאות פתורות

החשיפה של סטודנטים לפתרון בעיה מיד עם הצגתה באמצעות "דוגמה פתורה סטטית" או בסביבה אינטראקטיבית, נתפסה בעיני הלומדים כפעולה לא לגיטימית מבחינה מתמטית. מבחינתם בעיות מתמטיות יש לפתור וזוהי הדרך הראויה והבלעדית ללמידת מתמטיקה. אי לכך, היה צריך להסביר ולשכנע את משתתפי המחקר לעשות זאת במתכונת שנקבעה. הגדרת מסגרת (setting) ללמידה ומחקר לא הספיקה בפני עצמה לגרום לסטודנטים לנתח פתרון אינטראקטיבי של בעיה אחרת דומה על מנת לפתור את הבעיה שהוצגה להם ללא תיווך. מציאות זו אתגרה אותי כחוקרת ומרצה - להפגיש אותם עם בעיות לא שגרתיות עבורם ויצרה, עם התפתחות התהליך, את התפיסה החדשה של הלומדים כי ניתן להיעזר בפתרון אינטראקטיבי מאחר וניתוח הפתרון דורש מאמץ מנטלי ומגייס ידע מתמטי מגוון של הלומד, ויש בו אלמנטים של פתרון בעיה מתמטית.

כפי שעולה מניתוח התצפיות והיומנים שבהם כתבו הסטודנטים את הפתרונות ואת הרפלקציה לפתרונות, המרכיבים שהסטודנטים מייחסים לפתרון בעיה הם: ניתוח הבעיה (action); זיהוי מוקד הבעיה, כלומר המשפטים הנוסחאות או המושגים הקריטיים (objects) לידיעה ומניפולציה; העלאת שיקולים ואסטרטגיות; בחירת רעיונות יישומיים; ארגון הרעיונות ככאלה הנראים לסטודנטים כיעילים (הנימוקים לכך השתנו מלומד אחד לשני בהתאם למומחיותו בתחום הבעיה ובהתאם למיומנויות שבהן הוא שלט) ואשר באמצעותם ניתן לפתור באופן חסכוני את הבעיה. במקביל הועלו שיקולים לשלילת רעיונות לא יעילים, כאלה שמקדמים פתרון שאינו חסכוני ואולי גורר שימוש ברעיונות רבים יותר (process). כאשר הסטודנטים נדרשו לנתח פתרונות אינטראקטיביים, הם זיהו במהלך הזמן שהם מבצעים פעולות דומות לפעולות שהם מבצעים בתהליך פתרון בעיה.

ביומני הקורס מצאתי את האמירה הבאה:

> לא השתכנעתי לנתח פתרון אינטראקטיבי במקום לפתור בעיה מתמטית, אבל היום מצאתי את עצמי מנתחת פתרון וחווה תהליך של פתרון בעיה. מצאתי את עצמי מנסה לזהות את לב הבעיה, מנסה לבחון את האסטרטגיה שבה בחרו לפתור, מנסה להבין את הרצף של התהליך, אם יש כזה. כאשר הוא מוצג אינטראקטיבי הרצף תלוי

> בי. מנסה להצדיק בשפה פורמלית מתמטית את הייצוג הוויזואלי הדינמי שאני שולטת בו לכאורה [כי מישהו אחר הכין את היישומון].

הציטוט הזה מציג מחד גיסא את ראשית ההתנגדות להשתתף ב-setting הכולל למידה מדוגמה פתורה אינטראקטיבית, המנומק כפעילות לא ראויה מתמטית, לעומת פתרון בעיה שהוא הפעילות המקובלת המתמטית. בהמשך הסטודנטית כותבת כי חקר הפתרון האינטראקטיבי היה בעצמו תהליך של פתרון בעיה ולכן היא השתכנעה לבצעו. במונחי המחקר הנוכחי, ציטוטים מסוג זה, שחזרו על עצמם, מלמדים על כך שהמשתתפים החלו לסגל לעצמם את התפיסה שלמידת מתמטיקה באמצעות ניתוח פתרונות אינטראקטיביים - כמוה כפתרון בעיות. ניסיונה של הכותבת לכתוב פתרון פורמלי, לזהות את רצף הפתרון, להבין את היישומון שנבנה על-ידי מישהו אחר, ולהיצמד אליו בהנמקת הפתרון, מציגה את התפיסה כי זו פעילות מתמטית מקובלת, מכיוון שיש בה אלמנטים (חקר, הצדקה, חיפוש אחר אסטרטגיה, בניית תהליך לוגי) של פתרון בעיות במתמטיקה.
במקרה אחר סטודנטית אמרה במהלך דיון:

> אני מנסה להבין את הפתרון אבל אז אני מגלה שאני פותרת בעיה חדשה שהיא הניסיון להבין את הפתרון. ניסיתי לזהות מה עושה האינטראקטיביות וגיליתי שהיא מציגה לי עוד שני משולשים ואז חקרתי וגיליתי יחסי דמיון בין המשולשים, אבל זה לא מספיק, אז כדי לא להתבלבל התעלמתי ממשולש [...] והתייחסתי רק למשולש שנוצר בתוך היחידה וגיליתי איזו נקודה יוצרת את כל הקשרים ואז הבנתי גם שהניצב [...] הוא הנגזרת [...]. עכשיו אני צריכה לפתור בעיה למה הוא הנגזרת? כי לא מספיק לי להבין שמצאתי את הפתרון [...] ומצאתי אותו כי אני יודעת מראש את הנגזרת של טנגנס. ואם לא הייתי יודעת?

גם ציטוט זה מלמד על האופן שבו הסטודנטית השתכנעה להשתתף ב-setting של ניתוח פתרון מוצג אינטראקטיבית. על-פי התיאור, היא מציגה חוויה של תהליך של פתרון בעיה, וחוויה זו מקובלת עליה כלגיטימית ללמידת מתמטיקה.
באותו מפגש נאמר:

> מאחר ואנחנו עוסקים גם בדיון על עומס קוגניטיבי בהקשר של כל בעיה, אני מרגישה שיותר מורכב לי לפענח יישומון שמישהו אחר בנה, ולנסות להבין את נקודת המוצא של הפתרון שהוא התחיל, ולעקוב אחר רצף אינטראקטיבי שהוא לא ממש רצף, כי כל פעם אני עוצרת בתמונה אחרת סטטית, אבל בסוף אני מחברת בין כל הידע שצברתי בכל תמונה סטטית. אבל לדעתי זה עומס פנימי מובנה ויעיל, כי הוא מלמד אותי להכיר פתרונות מתמטיים אחרים שלא חשבתי עליהם.

ציטוט זה עולה בקנה אחד עם מחקרים הטוענים כי לא כל עומס פנימי גבוה הוא שלילי, כי מומחים שחווים עומס הנוצר ממהות המשימה, מאותגרים לפתור אותה מתוך תפיסה

עצמית של מומחיות, ותפיסת ההתפתחות המקצועית במתמטיקה כתהליך של אתגר והתמודדות עם פתרון בעיות מורכבות.[41]

במהלך המחקר, הסטודנטים בשתי הקבוצות נעו באופן מודע חלקית ממצב שבו הם מתנגדים להיחשף לפתרון בעיה יחד עם הצגתה, למצב שבו הם רואים את ניתוח הפתרון כתהליך של פתרון בעיה. בתהליך ההוראה והמחקר לא הבחנתי בממצא זה ורק לאחר קריאת היומנים ובדיקת התצפיות הבחנתי בתהליך שהקבוצות חוו. מניתוח השיעורים עולה כי רק בבעיות שבהן הסטודנטים חוו פענוח של הפתרון האינטראקטיבי ואותגרו להבין מדוע הוא נכון, למרות שהוא מוצג "כנכון" באמצעות היישומון, הם השתתפו ברצון בניתוח פתרון אינטראקטיבי.

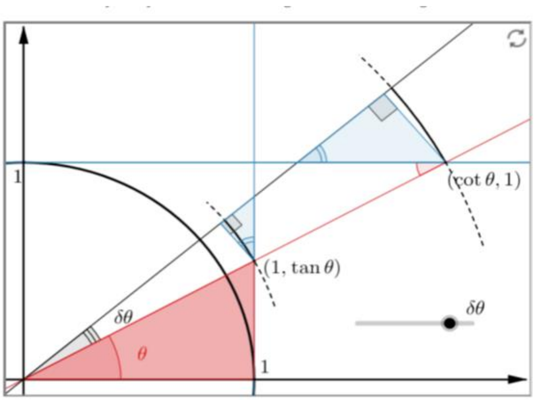
2. ניתוח פתרונות אינטראקטיביים וגילוי ידע מתמטי חדש

מן הממצאים עולה כי ניתוח אינטראקטיבי הוביל לגילוי ידע מתמטי חדש. הטריגר של הגילוי היה יכולתם של הסטודנטים לנהל את הפתרון וללמוד מריבוי הדוגמאות שהוא מציג לאותה בעיה. הכלי הטכנולוגי אִפשר לסטודנטים להתבונן בכל שלב של ניתוח הפתרון בחלק אחר שבו בחרו להתמקד (objects), ולבחון קשרים בין ייצוגים (למשל: ייצוג גרפי מול אלגברי או ייצוג גרפי אחד מול ייצוג גרפי אחר), קשרים בין מושגים (למשל: סימטריה של שטחים של אינטגרלים) כפי שהם זיהו אותם באמצעות הכלי, קשרים בין תחומי הגדרה לייצוג גרפי ועוד. קשרים אלה, קשה עד בלתי אפשרי לייצג בזמן קצר, בו-זמנית, ובאופן מדויק בצורה סטטית באמצעות מכשירי כתיבה. הפתרון האינטראקטיבי, כפי שנמצא מניתוח הנתונים, מקטין עומס קוגניטיבי ומווסת את הלומדים לפעולות המקדמות הבנת ההוכחה של הפתרון וכתיבת הוכחה של הפתרון.

בקישור https://undergroundmathematics.org/calculus-trig-log/similar-derivatives מוצגת הבעיה המתמטית (שניסוחה המקוצר הוא: למד מהיישומון האינטראקטיבי אודות הנגזרות של פונקציות הטנגנס והקוטנגנס כפי שהן מוצגות במעגל היחידה, וכתוב הוכחה פורמלית בהתאם. להלן תמונה מספר 2 סטטית מתוך היישומון).

---

41 Pollock, Chandler & Sweller, 2002; Ayres, Schubert & Sweller, 2014; Hoogerheide, Loyens & Van Gog, 2014; Sweller, 2015



וכך כתבה אודותיה סטודנטית:

> אם אני יכולה לשחק בפתרון בכל קנה מידה, בכל תחום, לבחון קשר בין ייצוגים באופן מיידי, להתבונן מה קורה לפונקציה אחת כאשר אני מזיזה ערכים של פונקציה אחרת [טנגנס וקוטנגנס], אני לא אמורה לזכור בו-זמנית כל כך הרבה ידע. למשל: ידע על קשרים ויחסים בין פונקציות טריגונומטריות בזוויות שונות. הכלי "מחזיק" עבורי את הידע זמין, ומה שנותר לי לעשות הוא להבין את הפתרון בהקשר של הבעיה ולבחון, מהו הידע החדש שלמדתי מהבעיה המיוחדת הזו, שלא עלה בדעתי [קודם הפתרון] [process and schema].

ציטוט זה לפי תאוריית ה-APOS מציג את תהליך בניית הסכמה של הפתרון. הסטודנטית הציגה את הכלי הדינמי ככזה האוסף עבורה את פרטי המידע, ואותה כמארגנת בין הפרטים וקשריהם לכדי משמעותם החדשה: "הידע החדש שלמדתי מהבעיה המיוחדת הזו שבמקרה הנוכחי, הוא בהחלט ידע מתמטי עקרוני, המחבר בין פונקציה לנגזרת בדרך הלא מוכרת לסטודנטים, שהיא מעגל היחידה". הרעיון כפי שהתגלה לפותרת בפתרון האינטראקטיבי, הפך לעיקרון של ידע ולא רק לידע מקומי, כי ניתן להכליל את השיטה להוכחת נגזרות נוספות באמצעות מעגל היחידה. נראה אם כן שעבור הסטודנטים, הכלי הדינמי משמש מעין "מחסן מידע", כפי שסוולר מציג זאת בעיקרון הראשון של תאוריית העומס הקוגניטיבי:[42] "אני לא אמורה לזכור בו זמנית כל כך הרבה ידע. הכלי 'מחזיק' עבורי את הידע זמין". בנוסף, הסטודנטית מתארת תהליך של זיהוי והשאלה בין ידע קודם לידע חדש: "מה שנותר לי לעשות הוא להבין את הפתרון בהקשר של הבעיה, ולבחון מהו הידע החדש שלמדתי מהבעיה המיוחדת הזו, שלא עלה בדעתי". מדבריה נראה כי הסביבה כפי שהיא עוצבה, קִדמה את יכולתה לבצע פעולות קוגניטיביות מורכבות (למשל: לזכור מידע רב בזמן קצר, לעבד מידע, לבנות ידע חדש מהותי לנושא).

---

[42] Sweller, 1988

פתרון הבעיה הנוכחית הוא לכאורה "פשוט", תוכן השאלה מוכר, וללומדים יש את כל הידע הנדרש כדי לפתור את הבעיה. ובכל זאת הבעיה נחשבת לא שגרתית בשל הצורה, הסגנון והאופן החזותי בהם היא מוצגת, כלומר הבעיה בצורה הלא-אינטראקטיבית מעלה עומס קוגניטיבי. אומנם לסטודנטים לא היה ידע קודם בתחום הוכחת נגזרות באמצעות מעגל היחידה, אך באמצעות "משחק" בסרגל האינטראקטיבי הם למדו ידע חדש והוא הקשר שבין הפונקציות המוצגות לנגזרותיהן כפי שהוא מתבטא במעגל היחידה. גילוי הידע החדש, הייצוג הגרפי-גיאומטרי של יחסים בין פונקציות, פונקציות הפיכות ונגזרותיהן במעגל היחידה, גרם להם לשלול פתרון לא אינטראקטיבי של הבעיה, משום שזה מצריך לזכור בו-בזמן פתרונות של זוויות טריגונומטריות מיוחדות, דורש מספר רב של שרטוטים וגורם "לתנועה" איטית של הפותר משלב לשלב ומרעיון לרעיון עד כדי סיכוי לאבד ריכוז, לאבד נתונים ולאבד פתרונות נוספים אפשריים. בזכות ידע מתמטי רב זמין המוצג באמצעות היישומון, הסטודנטים היו פנויים לגלות ידע חדש אף שלא נשאלו אודותיו בבעיה, אלא נבע מחקר (actions) של מצבים ויחסים בין המשולשים (objects), בין הזוויות (objects), בין הפונקציות (objects), והפונקציות ההפוכות (objects). בסרגלי המדידה לעומס הקוגניטיבי בבעיה זו, סטודנטים רשמו כי בניתוח הפתרון הם חוו עומס בינוני עד נמוך, אך בכתיבת פתרון פורמלי (process and schema) העומס היה גבוה. ולהלן דוגמאות לנימוקים:

> האמת שלו הבעיה הייתה ניתנת ללא כלי טכנולוגי, הרבה מתכונות הפונקציות הייתי מאבדת, לא זוכרת בזמן אמת, ואולי גם לא מגיעה לידע חדש כלל, הייתי מוכיחה כמו שאני יודעת כבר. גילוי הידע החדש היה בזכות הסיוע שהפקתי מהיישומון.
>
> אם היו שואלים אותי על שרטוט סטטי מה הקשר בין הפונקציות, הזויות, והנגזרות לפי תמונות המשולשים, לא בטוח שהייתי מגיעה לפתרון המלא הכולל את כל ההבנה וכל התפיסות כולל תמונות גרפיות במעגל של פונקציה מקורית ונגזרתה, כולל מחזוריות [process and schema].

תגובות אחרות מציגות שליטה בכלי הדינמי, וניסיון להקטין עוד יותר את העומס על זיכרון העבודה:

> אני כל הזמן התמקדתי בשני משולשים שנוצרו מתוך הסרגל הדינמי, כי אם הייתי מסתכלת על שלושה זה כבר מעמיס עליי, וידעתי ששניים מספקים לי את כל הקשרים הטריגונומטריים שאני צריכה.
>
> העומס הזה היה לפי מה שלמדנו שייך למבנה המשימה, עומס פנימי גבוה, אבל התחושה שלי בתהליך הייתה שהעומס מווסת, כי אני בחרתי במה להתמקד כדי להבין את מה שהיישומון מציג ולבנות הוכחה.
>
> אני עצרתי בתמונה סטטית שהתאימה לי. הפסקתי את ה"משחק" הדינמי ובניתי לי מערכת של קשרים בין כל הנתונים בתמונה שרציתי.

> אני חושבת שהייצוג הדינמי עובר לי בראש כמו סרט אחרי שסיימתי להבין אותו. בגלל שלא היה לי רצף ובניתי, יש לי עכשיו סרט נע של הרעיונות, פעם למדנו שסוולר בנה את התאוריה על הברירה הטבעית שהחזק תמיד ישרוד, אז ה'לכאורה דינמיות' הזו היא מבחינתי הידע החזק שישרוד, ש[אותו] אזכור.

בבעיה הנוכחית, הידע המתמטי החדש היה מציאת נגזרות של פונקציות טריגונומטריות דרך משולשים במעגל היחידה, וכתיבת הוכחה המקיימת את ה"פתרון" שהוצג ביישומון, מאחר והיישומון אינו הוכחה, אלא כלי להבין את התופעה המתמטית באמצעות מעגל היחידה שהוא ייצוג חדש ללומדים במקרה הנוכחי. ללא היישומון האינטראקטיבי, אף משתתף בקבוצות המחקר לא הצליח לצייר שרטוט עזר המקדם את פתרון הבעיה, גם בשל העובדה שהרעיון לא מוכר, וגם כי הוא תוצר של דינמיות שמורכב לבטאה באופן סטטי. חקר הדוגמה האינטראקטיבית חייב את הלומד להסביר לעצמו (כפי שמצאנו במחקרים קודמים,[43]) הסבר עצמי של דוגמה פתורה וקידם את היכולת לפתור בעיות ולהבין לעומק תופעות ומושגים מתמטיים.

בבעיה זו, מחד גיסא אופן הגשת המשימה העלה עומס קוגניטיבי מכיוון שהסיטואציה בה הוצגה הבעיה לא הייתה מוכרת, ומאידך גיסא, הנחתי הייתה שהכלי הדינמי יסייע ללומדים לעבד חלקים מהיישומון לפי הידע הקודם שלהם ולפי תהליך עיבוד אישי שאינו מכוון. במחקרה של וקסמן[44] נמצא כי שינוי בהכוונה של העיבוד מעמיס על הלומד. גם במחקר הנוכחי השינוי בהכוונה של עיבוד המידע, מִכתיבה פורמלית של הוכחה, לעיבוד של יישומון שבו פתורים חלקים מהבעיה, העמיס על הלומדים עומס פנימי. אך יחד עם זאת, העומס היה חיובי בהיבטים הבאים: המשתתפים ויסתו וניהלו אותו, אותגרו למצוא את המסר המתמטי המובע באינטראקציית היישומון, והגיעו לידע מתמטי עמוק ורחב אודות נושא מתמטי ידוע מהעבר.

3. **ניתוח פתרונות אינטראקטיביים וגילוי ידע מתמטי פדגוגי חדש**

בשלב ניתוח הנתונים נמצאו אירועים בהם הסטודנטים דיווחו בכתב בזמן ביצוע המשימה ולאחר הפתרון כי ביצוע המשימה הגביר את המאמץ המנטלי שלהם, והם חשו עומס קוגניטיבי שכלל בו-זמנית אחזקה בזיכרון העבודה רעיונות שעליהם לדון בהם, תמונות ויזואליות של הרעיונות (objects), שאלות שעולות בנוגע לפתרון, בחירה של אירועים שיש להם פוטנציאל להביא את הלומדים למצב הכללה (process and schema) והשוואה בין האירועים. כדי להתמודד בהצלחה עם המשימה, הסטודנטים נטו לכתוב לעצמם את

[43] Artino, 2008; Wong, Lawson & Keeves, 2002; Chi et al., 1989

[44] וקסמן, 2017

הבחירות שלהם לסדר שבו הם יפעלו, וליד כל פעולה (actions) את הייצוג או את חלק הפתרון המתאים (process).

ידע מתמטי חדש שהלומדים גילו הביא אותם לדיון בדרכי הוראה הולמות, גם "עם עצמם" ביומן וגם במליאה. כלומר, כאשר הם גילו כי הם לא היו מודעים לפתרונות נוספים שהוצגו בפתרון האינטראקטיבי, או כאשר הם גילו צדדים נוספים לתפיסה של מושג שלא היו ידועים להם קודם, הם ניסו לתרגם את המושגים והתכונות שלהם באופן דידקטי למעשה ההוראה. הידע החדש הביא אותם לחשוב על דרכי הוראה (process and schema) המתאימות לתלמידיהם, ועל הקשר שבין תמונת מושג אינטראקטיבית להבנת המושגים בהקשרם. למשל, הסטודנטים תהו באיזה אופן ניתן לבקש מתלמידים לקשר בין הפונקציות ונגזרותיהן במעגל היחידה? האם לפתור את הבעיה המסוימת שפתרו ולחזור לחזק את התפיסה של נגזרת בקירוב לינארי? האם ללמוד מבעיה זו על רעיונות דידקטיים אחרים? למשל, לנסות להבחין בין עוד נגזרות של פונקציות טריגונומטריות באמצעות מעגל היחידה? להלן קטעים מתוך הדיון הכיתתי:

> בתוכנית הלימודים החדשה וגם בבחינות הבגרות, יש התחלה של חידוש לקראת פתרון בעיות, שדורשות יותר הבנה של מושגים, קישור בין ייצוגים, והוכחות שמתחילות מהתבוננות בייצוגים גרפים. יחד עם זאת, אני תוהה מה נכון להגיש לתלמידים. להציג את הכלי האינטראקטיבי כפי שהציגו לי, לאפשר משחק בכלי, ואז לבקש להוכיח? או להוכיח בדרך פורמלית אחת לאו דווקא מעגל היחידה, ואז להציג את היישומון, ולבקש הוכחה על-פי היישומון, או לתת את היישומון, להציג אותו עם דוגמה פתורה סטטית כתובה מתאימה, וכך לסייע להם לעבור בין דוגמה פתורה אינטראקטיבית לדוגמה פתורה סטטית ולבנות את הידע החדש? כל הרעיונות נראים לי טובים מבחינה דידקטית, אבל האחרון נראה לי הכי מעמיס כי הוא מעבר בין שתי דוגמאות פתורות ודורש ריכוז רב, אבל אחרי שיבינו, זה עומס שישרת אותם להבנה עמוקה. מצד שני הם רק תלמידים, אז אולי שישחקו ביישומון ואחר כך נערוך דיון כיתתי?

ציטוטים מעין אלה מציגים את התפיסה שהלומדים פיתחו בהקשר שבין תהליך התפתחות הידע בחדו"א, ובין תאוריית העומס הקוגניטיבי ועיצוב ההוראה. הלומדים מבינים את היתרון של עיסוק בבעיות מהסוג שהם פוגשים בקורס שנובע מכך שחוו את היכולת להעמיק ולהבין מושגים, תופעות וייצוגים בהקשרים רחבים. יחד עם זאת, הם מבינים שכדאי לעצב את המשימה כך שתתאים למאפייני התלמידים שלהם מבחינת ידע קודם ומבחינת מיומנויות אישיות. הציטוטים מציגים את ההבנה שככל שהמשימה תעוצב בצורה טובה ומתאימה יותר ללומד, כך הוא יצליח להעמיק ולהרחיב את תפיסתו על המושגים והתופעות המתמטיות. לאורך הדיונים בשיעורים וגם ביומני משתתפי הקורס, נמצא כי הם חושבים בו-זמנית על עצמם ועל תלמידיהם. כאשר הם מתפתחים מבחינה מתמטית, הם

חושבים כיצד ראוי ללמד ידע זה, וכאשר הם חווים חוויית למידה שנראית להם מעוצבת כראוי למומחיותם, הם מנסים לעצב את המשימה כך שתתאים לתלמידיהם.

ספרות המחקר[45] מתייחסת לחוויית המורה ולרפלקטיביות של מורים כתהליך התפתחות קריטית. ברוקפילד[46] מציג מרכיבים של רפלקטיביות המשפיעים ומעצימים הוראה. בין המרכיבים הוא מתייחס למצב שבו מורים מגלים ידע חדש ומנסים לתכנן את עיצוב ההוראה עבור תלמידיהם, בהתאם לחווייתם, כפי שהתרחש במחקר הנוכחי.

4. ניתוח פתרונות אינטראקטיביים והקטנת עומס קוגניטיבי

במהלך הקורס נותחו בשתי הקבוצות בעיות שהוצגו בשלושה מצבים: באמצעות דוגמה פתורה סטטית, באמצעות דוגמה פתורה המוצגת ביישומון, ופתרון בעיה ללא "פיגומים". להלן בטבלה 2 אוסף "ממוצע" של הציונים שנתנו הסטודנטים לפעולות ותהליכים שהם חוו בפתרון הבעיות בשלושת המצבים. כל ציון ניתן בזמן אמת בעת ביצוע המשימה. על-פי המיפוי של מדידות הסטודנטים נמצא כי העומס הקוגניטיבי נמוך כאשר פענוח הדוגמה הפתורה היה אינטראקטיבי. העומס גדל כאשר תנאים סביבתיים אחרים השתנו, למשל: כאשר הסטודנטים נדרשו לכתוב פתרון פורמלי לבעיה שהם לא פתרו בעבר בעיה דומה לה, או כאשר הסטודנטים בחרו לבצע פעולות אחרות (למשל, לנתח מקרה פרטי שמציג מצב סטטי) במקום פענוח פתרון אינטראקטיבי. הסטודנטים ויסתו את עצמם בהקשר של הפעולות (actions) והתהליכים (processes) שהם ביצעו, בהתאם לתפיסות שלהם על הבעיה ועל המושגים הכלולים בה, ובהקשר של הייצוגים שהם רצו לקשר ביניהם. הם ציינו מיוזמתם פעולות מתמטיות שקִדמו ידע מושגי מתמטי חדש על פונקציות בהקשר של נגזרותיהן ובהקשר של ההפוכות להן. לפי הנתונים נראה היה שהעומס הקוגניטיבי הוא גבוה, משום שהעיסוק כלל בו-זמנית עיבוד של יותר מחמישה-שישה היבטים של הבעיה. אך כנראה שהסביבה האינטראקטיבית יצרה תחושה של שליטה בידע והקטינה את ה"חשש" המלווה את מי שפותר בעיה לא שגרתית, שמא הוא לא יצליח, או ישכח תוך כדי פתרון את התוכנית שהתכוון לבצע בפתרון, כי הפתרון הוצג בצורה דינמית. ציטוטים מהשיעור מציגים תפיסה זו:

> אי אפשר לומר שניתוח אינטראקטיבי מקטין עומס קוגניטיבי במובן הפשוט. במובן הלא פשוט, הוא כאילו מניח את זיכרון העבודה פנוי, כי הכלי האינטראקטיבי מחזיק את פריטי הזיכרון. זה לא אומר שאני יכולה לזכור בזמן אמת יותר מתשעה פריטים, אלא יש לי ביטחון שאני יכולה להעלות אותם מהכלי לזיכרון בהתאם להתפתחות הבנת תהליך הפתרון.

---

[45] Brookfield, 2017; Schön, 2017; Kolb, 2014

[46] Brookfield, 2017

> צריך להבין שהוא יוצר תחושה פנימית של שליטה על הידע. הפותר יודע שכל הידע כאן, הוא משוחרר מכתיבה מרובה של חלקי פתרון או מריבוי שרטוטים, או פעולות אחרות שפותר בדרך כלל עושה כשיש לו רעיון והוא מפחד לאבד אותו.
>
> הכלי הוא מעין מחברת שבה כבר ציירנו הכול, כתבנו בקיצור את היחסים האלגבריים, בזמן עיבוד ותכנון הבעיה, וכעת אנחנו מעיינים במחברת שנית, כדי לתכנן את הפתרון הפורמלי. אולי ההרגשה היא כאילו כתבנו את הפתרון לפני שבוע ואנחנו מנסים להבין למה התכוונו אז [...] יש פה עומס של ניסיון להבין אבל ביטחון שבוודאי נבין, והתחושה של הביטחון מקטינה את העומס של החרדה מאי יכולת לפתור בעיה.

אכן ניתן לעקוב אחר הפעולות והתהליכים שהסטודנטים ביצעו על האובייקטים (הפונקציות בייצוגים שונים) וללמוד מהם על התפיסה המנטלית החדשה שהם פיתחו אודות הפונקציות שכבר היו ידועות להם, וזאת בזכות הקטנת העומס הקוגניטיבי על זיכרון העבודה באמצעות הפתרון האינטראקטיבי. כאשר הם פעלו על היישומון המסוים של בעיות מתמטיות, הם רשמו ידע מתמטי בו הם נזכרו תוך כדי "המשחק", והיו צריכים להגדיר מדוע הפתרון שנמצא הוא הפתרון במסגרת התמונות שנוצרו באמצעות היישומון.

בטבלה 2 מרוכזים המדדים הממוצעים של העומס הקוגניטיבי שציינו הסטודנטים לפעולות ותהליכי הלמידה בסביבות שונות: ציון 1-3 מייצג עומס נמוך, ציון 4-5 מייצג עומס בינוני וציון 6-9 מייצג עומס גבוה. בכל שיעור בקורס בכל קבוצה נפתרו שתיים או שלוש בעיות, ועבור כל אחת מהן המשתתפים מילאו טבלה. משתי הקבוצות התקבלו 58 טבלאות של מדידה. מאחר והיו 20 סטודנטים שנבדלו זה מזה ברמת המומחיות המתמטית, שנות הוותק בהוראה, שכבות הגיל שבהן לימדו, ייתכן וקיים קשר בין נתונים אלו לבין ערך המדידה. אלא שבמחקר הנוכחי לא בחנתי את הקשרים מפאת גודל המדגם. הטבלאות יחד עם נימוקי הציון נועדו על מנת לאפיין את מהות העומס בהקשר של עיצוב המשימה.

טבלה 2: **ייצוג מדידות "ממוצעות" של הסטודנטים לפעולות ותהליכי הלמידה בסביבות שונות**

פעולות ותהליכי למידה (קריטריון מוערך)	הערכה גבוהה לעומס קוגניטיבי 9-6	הערכה בינונית לעומס קוגניטיבי 5-4	הערכה נמוכה לעומס קוגניטיבי 3-1
פענוח בעיה מוכרת ללא פתרון		✓	
פענוח בעיה כאשר הפתרון מוצג בסגנון לא מוכר	✓		
פענוח דוגמה פתורה לא אינטראקטיבית לבעיה מוכרת		✓	
פענוח דוגמה פתורה לא אינטראקטיבית לבעיה מוכרת		✓	

פעולות ותהליכי למידה (קריטריון מוערך)	**הערכה גבוהה לעומס קוגניטיבי 9-6**	**הערכה בינונית לעומס קוגניטיבי 5-4**	**הערכה נמוכה לעומס קוגניטיבי 3-1**
פענוח דוגמה פתורה אינטראקטיבית לבעיה מוכרת			✓
פענוח דוגמה פתורה אינטראקטיבית לבעיה לא מוכרת		✓	
פענוח של חלק נבחר מהדוגמה הפתורה האינטראקטיבית			✓
פענוח דוגמה פתורה אינטראקטיבית של בעיה דומה			✓
תכנון פתרון אינטראקטיבי			✓
תכנון פתרון בכתב - דף ועט		✓	
הבעת הפתרון באופן מתמטי פורמלי בכתב	✓		
הסבר הפתרון באמצעות כלי טכנולוגי			✓
לחץ של זמן		✓	
לחץ של סביבה (למשל פותרים אחרים סיימו ואני לא)		✓	
סגנון שאלה מנוסח באופן לא מוכר	✓		
<u>קריטריון שהוסיפו סטודנטים</u>: שאלות נוספות שניתן לחבר על הפתרון האינטראקטיבי		✓	✓
<u>קריטריון שהוסיפו סטודנטים</u>: חוסר מומחיות בתחום הבעיה	✓		

מהטבלה הכללית ניתן ללמוד על פעולות ותהליכי למידה שאותם ציינו הסטודנטים כסביבות פוטנציאליות לעומס קוגניטיבי והם: פענוח דוגמה פתורה לא אינטראקטיבית; חוסר מומחיות בתחום הבעיה; פתרון של סגנון שאלה לא מוכר. לעומתן ניתן לראות את הסביבות והעיצובים שצוינו בציון ממוצע בינוני או נמוך, למשל: פענוח דוגמה פתורה אינטראקטיבית לבעיה לא מוכרת, פענוח דוגמה פתורה אינטראקטיבית של בעיה דומה.

להלן דוגמה של קטע מתוך טבלה (מספר 3) שאותה מילאה סטודנטית בתום שיעור שבו היו שלושה מצבים: פתרון בעיה ללא פתרון מוצג; פענוח דוגמה פתורה סטטית; ניתוח דוגמה פתורה אינטראקטיבית. הקטע מדגים את האופן שבו נימקו הלומדים את מדד העומס האישי.

טבלה 3: **מדידת עומס והנמקתו**

פעולות ותהליכי למידה (קריטריון מוערך)	הערכה גבוהה לעומס קוגניטיבי 6-9	הערכה בינונית לעומס קוגניטיבי 4-5	הערכה נמוכה לעומס קוגניטיבי 1-3	הערות
פענוח בעיה בסגנון לא מוכר	9			במשוואה של מעגל שהוצגה באמצעות פונקציות טריגונומטריות, לא היה לי רעיון להתחיל לפשט את המשוואה ולא היה לי מושג מה המבנה שלה מייצג מבחינה אלגברית. לחלוטין לא חשבתי על ייצוג גרפי מתאים. היו לי מעט רעיונות ולא הצלחתי לעבד כל קשר בין הרעיונות למשוואה.
פענוח דוגמה פתורה לא אינטראקטיבית (סטטית) לבעיה מוכרת		5		כשהציגו את הפתרון של חלוקת הפולינומים, הבנתי את השיטה החדשה לחלוקת פולינום מתוך הפתרונות, אבל לא חשבתי על רעיונות לחלוקות אחרות שלא מוצגות. לא ביצעתי הכללה לרעיון, לא קישרתי (כי לא הייתה דוגמה פתורה) בין הפתרון האלגברי לייצוג הגרפי של הפולינומים המחולקים.
פענוח דוגמה פתורה לא אינטראקטיבית לבעיה מוכרת		5		ברגע שראיתי את הפונקציה $y=e^x$ ובה מסומן השטח שצריך למצוא, לא הבנתי מה הקשר בינה לבין אינטגרל של $y=lnx$. אבל כששיחקתי ביישומון הבנתי מיד את רעיון הסימטריה של שני השטחים, וזה ידע חדש לי. הייתי צריכה לחקור למה הפתרון נכון וכיצד לכתוב אותו אלגברית. לא הייתי מגיעה להבנה מדוגמה פתורה סטטית. הציון שלי (5) מתאר בדיוק את האתגר שחוויתי, זו לא בעיה שהכרתי (עומס 1-3), זו לא בעיה שאני חוששת שלא אצליח לפתור או להבין פתרון דינמי (6-9), יש לי אתגר להבין את הקשר בין הפונקציות ובין השטחים, והכלי עשה זאת עבורי.

כפי שנמצא במחקרים קודמים, גם במחקר הנוכחי נמצא כי עיצוב משימות בהתאם למאפייני הלומד, בהתאם לעקרונות להוראה באקדמיה,[47] ובהתאם לאופן שבו לומדים מפתחים מושגים בחדו"א,[48] הביא למצב שבו הסטודנטים העמיקו ידע בחדו"א תוך כדי חוויה של הקטנת עומס קוגניטיבי מיותר. הם הציגו עומס גבוה כאשר הם חוו חוסר יכולת להבין את הפתרון או חוסר ברעיונות. גם כאשר טענו שהעומס היה גבוה, המדידה צוינה כבינונית משום שהם חוו אתגר והנעה להבין את הפתרון המוצג. סטודנטים שהציגו עומס נמוך הציגו אותו במקרה שחוו היעדר אתגר או חידוש.

מסקנות ודיון

שאלת המחקר הייתה: מה מאפיין תהליך למידה של פתרון בעיות, חקר דוגמאות פתורות סטטיות ואינטראקטיביות בחדו"א בקרב סטודנטים-מורים?

ממצאי המחקר הנוכחי מתמקדים בארבעה היבטים של התשובה לשאלה זו: התפיסה של המורים את חקר הדוגמאות הפתורות; הידע המתמטי והדידקטי החדש שנלמד בזכות הפתרון האינטראקטיבי; העומס הקוגניטיבי; תאוריית APOS בהתייחס לכל ההיבטים. אדון בהיבטים הנזכרים בהקשר של הממצאים הנוכחיים ומעמדם לעומת ממצאי מחקרים קודמים.

ניתוח הנתונים מתוך התבוננות בארבעת המרכיבים של תאוריית ה-APOS (בדומה למחקרם של ארנון ואחרים),[49] אִפשר התבוננות בתהליך הפתרון של הסטודנטים כתהליך שבו מעמיקה תפיסה אודות תופעה או מושג המתרחש בסביבות שונות. למשל, כאשר הסטודנטים פענחו פתרון אינטראקטיבי הם רשמו ביומנים פעולות שביצעו כגון: הגדלת זווית ומציאת זוויות השוות לה והקשר ביניהן, הבינו למשל כי התהליך של הנגזרת של טנגנס קשור בפונקציה הפוכה וקשור גם בגודל הניצב של המשולש הדומה, והגיעו להכללה של תובנות אודות הקשר שבין נגזרת לבין משולשים דומים במעגל היחידה. בחינת ארבעת המרכיבים בתוך כל אירוע במחקר, אִפשרה זיהוי של הרמה אליה הגיעו הלומדים. באירוע אחר, כאשר ניתחתי כיצד הסטודנטים מפענחים פתרון בעיה שהוצג סטטית, מצאתי שהם הבינו את הפתרון לבעיה הנתונה ולאו דווקא יצרו הכללה של הרעיונות מהבעיה הנתונה לנושא בו היא מתקיימת. למשל: כאשר ניתנה דוגמה פתורה סטטית שמציגה אסטרטגיית פתרון של חלוקת פולינומים, היו בחקר הדוגמה רק שני מרכיבים מהתאוריה: פעולות שמבצעים על הפולינום, ותהליך שנוצר מהפעולות. הסטודנטים לא שמו לב לאובייקטים

---

[47] Sweller, 2015

[48] Verhoef et al., 2015

[49] Arnon et al., 2014; Chamberlain & Vidakovic, 2017

החדשים שנוצרו מהפעולות, ולא יצרו הכללה של סכמה של הרעיון. רק דיון על הרעיון הכללי של האסטרטגיה באופן מוצהר, יצר את השיח שהמשיג את הסכמה של התפיסה שלהם על הדוגמה הפתורה. ניתוח באמצעות תאוריית APOS תוך כדי המחקר סייע לבחור בעיות ולעצב אותן, כך שכל ארבעת המרכיבים יתקיימו במהלך הלמידה של הבעיה.

באמצעות תאוריית העומס הקוגניטיבי, ניתחתי את למידתם של הסטודנטים כפי שבאה לביטוי ביומניהם ובתיעוד התצפיות. מתוך כך עלו שני דגשים: הראשון מתייחס לכך שניתוח הפתרון היווה בעיה בפני עצמה. הסטודנטים ניסו לחקור את הפעולות שנעשו ביישומון, את התהליכים שהוא מציג ואת התמונות השונות בהקשרן, ובהקשר של הבעיה וניתוחה. הדגש השני מתייחס לכך שיתרונן של דוגמאות אינטראקטיביות הוא ביכולת הכללה שהלומד מייצר לתופעה או למושג שהוא חוקר באמצעות הפתרון, ולשאלות המשך שהסטודנט העלה כתוצאה מבניית סכמה מכלילה (למשל: האם הפתרון מתקיים רק בפונקציית טנגנס או שניתן באמצעות מעגל יחידה להוכיח את כל נגזרות הפונקציות הטריגונומטריות?). כלומר לפי תאוריית ה-APOS ניתן לעקוב אחר התפתחות הבנייה של תפיסת מושג, ולפי תאוריית העומס הקוגניטיבי ניתן להבין את החוויה כפי שהפותר חווה. הפותר מציג בשיעור או ביומן את עיצוב המשימה כמעמיק ידע מתמטי, יחד עם מודעות והסבר אודות סביבה שיש בה או חסרים בה פיגומים להעמקת הידע.

במחקרו של תוקוז[50] נותחו ראיונות באמצעות תאוריית ה-APOS ונמצא כי סטודנטים שרואיינו תוך כדי פתרון בעיות בתחום החדו"א, הציגו ידע חלקי של מושג הנגזרת כפי שהתבטא בפתרונות הן באופן סימבולי והן באופן גרפי. בנוסף, הם הוכיחו חולשה בשרטוט האסימפטוטות המתאימות לפונקציות. כהמלצות מתוצאות המחקר מציע החוקר להעמיק את הדיונים ולגוון את עיצוב הבעיות המוצגות לסטודנטים במהלך הוראת חדו"א, כך שהבעיות יעסקו בצדדים רבים של אותה תופעה (למשל: אסימפטוטה) ובהיבטים נוספים של הוכחה (למשל: באמצעות כתיבת פורמלית אלגברית, או באמצעות חקר ייצוגים גרפים דינמיים). המחקר הנוכחי אימץ המלצה זו ושילב בהוראה דיונים אודות בעיות המדגישות תכונות של פונקציות, ומצא כי הלומדים השיגו במהלך המחקר ידע קונספטואלי מקיף אודות המושגים הקריטיים בתחום (הקשר שבין גודל ניצבי משולשים דומים לפונקציות של הזווית טנגנס והכללה לפונקציות אחרות, למשל: האם ניתן להגדיר גם נגזרות של סינוס וקוסינוס באמצעות משולשים דומים במעגל היחידה?). בשלב שבו המורים ניתחו את הדוגמה הפתורה, בו-זמנית הם ציינו לעצמם את הדגשים המתמטיים החשובים ודייקו בהיבטי הבעיה.

[50] Tokgoz, 2015

במחקריהן של אקרמן וכן של סידי ואחרים[51] נמצא כי ההישגים במבחן המופיע על מסך נמוכים יותר מאשר במבחן הנקרא מדף נייר, אך הבדל זה נמצא רק כאשר זמן הלמידה נשלט באופן מלא על-ידי המשתתפים. כאשר זמן הלמידה היה מוגבל, רמת הביצוע הייתה דומה הן בקריאה ממסך והן בקריאה מדף נייר. בכל המקרים, ההערכה הסובייקטיבית של הידע הייתה מוגזמת כשהקריאה הייתה על מסך ומדויקת יותר כשהיא הייתה מדף נייר. ממצאים אלה מצביעים על כך שהמדיה לא משפיעה על הלמידה לכשעצמה אלא על יעילות הניהול של תהליך הלמידה. ממצא זה מחזק את ממצאי המחקר הנוכחי בהקשר של יעילות ניהול הלמידה. במחקר הנוכחי, הסטודנטים התבקשו לפענח דוגמה פתורה אינטראקטיבית ולכתוב את הפתרון באופן פורמלי. הפתרון הפורמלי מנע את ה"אשליה" של הבנת הפתרון הדינמי, או "שטחיות" וכלליות, כי אכן נלקחה בחשבון מראש האפשרות שהפתרון הדינמי מציג למשחק בו תחושה של ידע, אך לאו דווקא ידע מדויק ומאורגן. הסטודנטים למדו במהלך הקורס לנהל ולווסת את הלמידה העצמית שלהם באמצעות ה"מסך" כך שהם הציגו עליו את הידע הקריטי אותו הם בחרו לנתח וללמוד לעומק. לעומת מחקרה של אקרמן וחוב' שם נמצא כי הלמידה ממסך היא שטחית, הרי שבמחקר הנוכחי, סביבת הלמידה שדרשה פענוח של בעיה וכתיבת פתרון פורמלית, דרשה למידת עומק.

לדעתם של קסטרו-אלונסו וחוב',[52] ייצוגים דינמיים מעוררים יותר מוטיבציה ללמידה, אך יש סיכוי שהמידע שהם מציגים הוא בר-חלוף. על מנת להתגבר על "רכישה" לא עמוקה של מושגים, הם ממליצים על ביצוע מניפולציות תוך כדי למידה מייצוגים ויזואליים דינמיים. במחקר הנוכחי, הלומדים היו חייבים לבצע מניפולציות בפתרון האינטראקטיבי, כך שהפתרון לא הוצג להם כ"סרט" אלא ככלי שהם שולטים בו, והם מארגנים אותו לכדי דינמיות, אך הוא מוגבל לתכנון שבוצע לו מראש, ויש לחקור ולהבין תכנון מסוים זה. עיבוד הדוגמה האינטראקטיבית והמעקב אחר מרכיביה הוא בשליטת המורה-סטודנט הצופה בה, כך שהוא בוחר את המרכיבים בהם יתמקד וינתח והמרכיבים מהם יתעלם לעת עתה. מצב זה מחייב את הלומד לוויסות עצמי (כפי שהיה במחקרם של יונג, פן ונגו),[53] והכוונה עצמית לבחירה בין האלמנטים שמרכיבים את הפתרון לכאלה שהם סביבת הבעיה, ואינם בהכרח קשורים לפתרון, לדעתו (למשל כאשר מגדילים את הזווית הנתונה במעגל הטריגונומטרי, נוצרים עוד שני משולשים כחולים. הבחירה המנומקת להתבונן רק בזוג אחד מביניהם היא התמקדות מושכלת הנובעת מהבנה ששלושת המשולשים דומים, ודי להתמקד בשניים מהם כדי לנתח את הפתרון). תהליך זה מחייב הבנת עומק של המושגים בהקשרם (למשל: מה

---

[51] אקרמן, 2014; Sidi, Shpigelman, Zalmanov & Ackerman, 2017

[52] Castro-Alonso, Ayres & Paas, 2015

[53] Phan, Ngu & Yeung, 2017

הקשר בין נגזרת של פונקציה לבין גודל הניצב במשולש המבוטא באמצעות ביטוי שהוא הנגזרת?). המחקר הנוכחי מוסיף למחקר של קסטרו-אלונסו[54] את עיצוב המולטימדיה המונע חשיבה שטחית. במחקרה של וקסמן[55] נמצא כי קיים קשר בין שינוי בהכוונה של העיבוד לצורך מתן מענה על שאלה על גרף, ובין עומס קוגניטיבי. כך שכאשר הנשאל מתבקש להתבונן במצב מסוים בגרף, העומס הקוגניטיבי עולה. גם במחקר הנוכחי, סביבת הלמידה בה הלומד מנתח את הפתרון הדינמי הייתה בעלת פוטנציאל להכביד על העומס הקוגניטיבי כאשר המפענח של הייצוג הדינמי לא מצליח לעקוב אחר הקשר שבין האובייקטים בבעיה (גודל הזווית, המשולשים הדומים, הנקודה הדינמית שבה מתבצע השינוי של המשולשים המוצגים במעגל), והפתרון (התהליכים, הקשר שבין גודל הניצב לגודל הקשת והבנת הגדלים כקירוב לינארי). סביבת הלמידה עשויה הייתה גם להנמיך עומס קוגניטיבי כאשר הייצוג הדינמי מוצג כך שהמרכיבים שלו מאורגנים באופן ברור ובולט כתשובה לבעיה. המחקר הנוכחי מאשש את הממצאים של וקסמן ומרחיב אותם לשלושה מקרים של הכוונה של הלומד לניתוח הגרף. המקרה שבו נדרשו לפענוח פתרון אינטראקטיבי לבעיה לא מוכרת שהמומחיות שלהם בתחום היא מעטה היה בינוני, לעומת המקרה שבו נדרשו לפענוח פתרון שיש בו גם גרף ללא כלי דינמי היה עומס גבוה, והמקרה שבו נדרשו לפענוח פתרון אינטראקטיבי לבעיה מוכרת היה נמוך.

לסיכום, ניתן לומר כי המחקר הנוכחי שילב בין שתי מסגרות תאורטיות: האחת מהחינוך המתמטי - APOS, והשנייה מהפסיכולוגיה הקוגניטיבית - תאוריית העומס הקוגניטיבי בלמידה, על מנת לבחון תהליך למידה של סטודנטים שהם מורים. במחקר נמצא כי חקר דוגמאות פתורות אינטראקטיביות בתחום חדו"א מקטין את העומס הקוגניטיבי של הלומד, ומייצר סביבת למידה פוטנציאלית להעמקה ולחידוש ידע מתמטי ומתמטי-פדגוגי של תופעות ומושגים בתחום החדו"א, כך שהלומד נע ממצב של פעולות למצב של בניית סכמה למושגים והתופעות.

[54] Castro-Alonso, 2015

[55] וקסמן, 2017

ביבליוגרפיה

וידר, מ' וגורסקי, פ' (2010). שימוש בסימולציה ממוחשבת להסרת מחסומים ויזואליים בהוראת הגיאומטריה במרחב. בתוך: י' עשת-אלקלעי, א' כספי, ס' עדן, נ' גרי, י' יאיר (עורכים), **ספר כנס צ'ייס למחקרי טכנולוגיות למידה 2010: האדם הלומד בעידן הטכנולוגי**. רעננה: האוניברסיטה הפתוחה.

וקסמן, פ' (2017). **הקשר בין תהליכי תפיסה חזותית וקשב חזותי לבין עיבוד גרף קווי**. חיבור לשם קבלת תואר דוקטור. רמת-גן: אוניברסיטת בר-אילן.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S.R., Trigueros, M., & Weller, K. (2013). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer Science & Business Media.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S.R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). The APOS Paradigm for research and curriculum development. In: *APOS Theory* (pp. 93-108). New York: Springer.

Artino, A.R., Jr. (2008). Cognitive load theory and the role of learner experience: An abbreviated review for educational practitioners. *AACE Journal*, *16*(4), 425-439.

Atkinson, R.K., & Renkl, A. (2007). Interactive example-based learning environments: Using interactive elements to encourage effective processing of worked examples. *Educational Psychology Review*, *19*(3), 375-386.

Awang, T.S., & Zakaria, E. (2013). Enhancing students' understanding in integral calculus through the integration of Maple in learning. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *102*, 204-211.

Bell, J. (2014). *Doing your research project: A guide for first-time researchers*. UK: McGraw-Hill Education.

Borji, V., Alamolhodaei, H., & Radmehr, F. (2018). Application of the APOS-ACE theory to improve students' graphical understanding of derivative. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(7), 2947-2967.

Bowen, W.G., Chingos, M.M., Lack, K.A., & Nygren, T.I. (2014). Interactive learning online at public universities: Evidence from a six-campus randomized trial. *Journal of Policy Analysis and Management*, *33*(1), 94-111.

Brookfield, S.D. (2017). *Becoming a critically reflective teacher*. John Wiley & Sons.

Brünken, R., Plass, J.L., & Leutner, D. (2003). Direct measurement of cognitive load in multimedialearning. *Educational Psychologist*, *38*, 53-61.

Carlson, M.P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics*, *58*, 45-75.

Castro-Alonso, J.C., Ayres, P., & Paas, F. (2015). The potential of embodied cognition to improve STEAM instructional dynamic visualizations. In: Xun Ge, J.D. Ifenthaler & M.

Spector (Eds.), *Emerging technologies for STEAM education* (pp. 113-136). New York: Springer, Cham.

Chamberlain Jr. D., & Vidakovic, D. (2017). Developing student understanding: The case of proof by contradiction. In: *Proceedings of the 20th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.*

Chang, B.L., Cromley, J.G., & Tran, N. (2016). Coordinating multiple representations in a reform calculus textbook. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(8), 1475-1497.

Chi, M.T., Bassok, M., Lewis, M.W., Reimann, P., & Glaser, R. (1989). Self-explanations: How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive Science*, *13*, 145-182.

Cowan, N., (2001). The magical number 4 in short-term memory: A reconsideration of mental storage capacity. *Behavioral and Brain Sciences*, *24*(1), 87-114.

Dubinsky, E., & McDonald, M.A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In: D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 275-282). Dordrecht: Springer.

Hoogerheide, V., Loyens, S.M., & Van Gog, T. (2014). Comparing the effects of worked examples and modeling examples on learning. *Computers in Human Behavior*, *41*, 80-91.

Hu, F.T., Ginns, P., & Bobis, J. (2015). Getting the point: Tracing worked examples enhances learning. *Learning and Instruction*, *35*, 85-93.

Kabael, T. (2009). The effects of the function machine on students' understanding levels and their image and definition for the concept of function. In: S.L. Swars, D.W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 58-64). GA: Georgia State University, Atlanta.

Kabael, T. (2011). Generalizing single variable functions to two-variable functions, function machine and APOS. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *11*(1), 484-499.

Kalyuga, S., Chandler, P., & Sweller, J. (1998). Levels of expertise and instructional design. *Human factors*, *40*(1), 1-17.

Kidron, I., & Tall, D. (2015). The role of embodiment and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 183-199.

Kirschner, P.A., Sweller, J., & Clark, R.E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational psychologist*, *41*(2), 75-86.

Kolb, D.A. (2014). *Experiential learning: Experience as the source of learning and development.* FT press.

Kollar, I., Ufer, S., Reichersdorfer, E., Vogel, F., Fischer, F., & Reiss, K. (2014). Effects of collaboration scripts and heuristic worked examples on the acquisition of mathematical argumentation skills of teacher students with different levels of prior achievement. *Learning & Instruction*, *32*, 22-36. doi:10.1016/j.learninstruc.2014.01.003.

Martínez-Planell, R., Gaisman, M.T., & McGee, D. (2015). On students' understanding of the differential calculus of functions of two variables. *The Journal of Mathematical Behavior*, *38*, 57-86

Mayer, R.E. (2014). Incorporating motivation into multimedia learning. *Learning and Instruction*, *29*, 171-173.

Mayer, R.E., & Moreno, R. (2003). Nine ways to reduce cognitive load in multimedia learning. *Educational psychologist*, *38*(1), 43-52.

Miller, G.A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, *63*(2), 81.

Nelson, B. (2007). Exploring the use of individualized, reflective guidance in an educational multi-user virtual environment. *The Journal of Science Education and Technology*, *16*(1), 83–97.

Nemirovsky, R., & Rubin, A. (1992). *Students' tendency to assume resemblances between a function and Its Derivative*. TERC Working Paper 2–92, Cambridge, Massachusetts.

Ovadiya, T., & Segal, R. (2017). Principles in designing technology-integrated geometry tasks for teaching teachers. In: B. Kaur, W.K. Ho, T.L. Toh & B.H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 353-360). Singapore: PME.

Paas, F. (1992). Training strategies for attaining transfer of problem-solving skill in statistics: A cognitive-load approach. *Journal of Educational Psychology*, *84*(4), 429.

Paas, F., Van Merriënboer, J.G., & Adam, J. (1994). Measurement of cognitive load in instructional research. *Perceptual and Motor Skills*, *79*(1), 419-430.

Paas, F., Tuovinen, J.E., Tabbers, H., & Van Gerven, P.W. (2003). Cognitive load measurement as a means to advance cognitive load theory. *Educational Psychologist*, *38*(1), 63-71.

Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it? *Educational Studies in Mathematics, 89*(2), 233-250.

Phan, H.P., Ngu, B.H., & Yeung, A.S. (2017). Achieving optimal best: Instructional efficiency and the use of cognitive load theory in mathematical problem solving. *Educational Psychology Review*, *29*(4), 667-692.

Pollock, E., Chandler, P.M, & Sweller, J. (2002). Assimilating complex information. *Learning and Instruction*, *12*(1), 61-86.

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J.R. (2015). Not a one-way street: Bi-directional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, *27*(4), 587-597. doi: 10.1007/s10648-015-9302-x.

Rossow, M.P. (2005). *Theoretical basis for learning statics by studying worked examples.* Presentation to the American Educational Research Association, New Orleans LA. http://www.ce.siue.edu/examples/Worked_examples_Internet_textonly/Home_page/ Theoretical_basis.pdf.61

Schön, D.A. (2017). *The reflective practitioner: How professionals think in action.* U.K.: Routledge.

Sidi, Y., Shpigelman, M., Zalmanov, H., & Ackerman, R. (2017). Understanding metacognitive inferiority on screen by exposing cues for depth of processing. *Learning and Instruction*, *51*, 61-73.

Star, J.R., & Pollack, C. (2015). Inhibitory control and mathematics learning: Definitional and operational considerations. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *47*(5), 859-863. doi: 10.1007/s11858-015-0716-1.

Sullivan, B.K. (2012). *5 methods to collect data with diary studies.* https://bigdesignevents.com/2012/08/09/5-methods-to-collect-data-with-diary-studies/

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, *12*, 257–285.

Sweller, J. (2011). Cognitive load theory. *Psychology of learning and Motivation*, *55*, 37-76.

Sweller, J. (2015). In Academe, what is learned, and how is it learned? *Current Directions in Psychological Science*, *24*(3), 190-194.

Sweller, J. (2015). Working memory, long-term memory, and instructional design. *Journal of Applied Research in Memory and Cognition*, *5*(4), 360-367.

Sweller, J., Van Merrienboer, J.J., & Paas, F.G. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational psychology review*, *10*(3), 251-296.

Tall, D. (1985a). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching*, *110*, 49-53.

Tall, D (1985b). The gradient of a graph. *Mathematics Teaching*, *111*, 48-52.

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the learning of calculus and analysis. *Focus on Learning Problems in mathematics*, *12*(3), 49-63.

Tall, D. (2000). Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal*, *12*(3), 210-230.

Tall, D., Smith, D., & Piez, C. (2008). Technology and calculus. In: M.K. Heid & G.W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Research syntheses* (pp. 207-258). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Tindall-Ford, S., Agostinho, S., Bokosmaty, S., Paas, F., & Chandler, P. (2015). Computer-based learning of geometry from integrated and split-attention worked examples: The power of self-management. *Journal of Educational Technology & Society*, *18*(4), 89.

Tokgoz, E. (2015). Analysis of STEM majors' calculus knowledge by using APOS theory on a Quotient Function Graphing Problem. *Age*, *26,* 1.

Van Merrienboer, J.J., & Sweller, J. (2005). Cognitive load theory and complex learning: Recent developments and future directions. *Educational psychology review*, *17*(2), 147-177.

Verhoef, N.C., Coenders, F., Pieters, J.M., van Smaalen, D., & Tall, D.O. (2015). Professional development through lesson study: Teaching the derivative using GeoGebra. *Professional development in education*, *41*(1), 109-126.

Wong, R.M., Lawson, M.J., & Keeves, J. (2002). The effects of self-explanation training on students' problem solving in high-school mathematics. *Learning and Instruction*, *12*(2), 233-262.

Wong, A., Leahy, W., Marcus, N., & Sweller, J. (2012). Cognitive load theory, the transient information effect and e-learning. *Learning and Instruction*, *22*(6), 449-457.

Youssef-Shalala, A., Ayres, P., Schubert, C., & Sweller, J. (2014). Using a general problem-solving strategy to promote transfer. *Journal of Experimental Psychology, 23*, 215.

Yung, H.I., & Paas, F. (2015a). Effects of computer-based visual representation on mathematics learning and cognitive load. *Educational Technology and Society*, *18*(4), 70-77.

Yung, H.I., & Paas, F. (2015b). Effects of cueing by a pedagogical agent in an instructional animation: A cognitive load approach. *Educational Technology & Society*, *18*(3), 153-160.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, *4*, 93-114.